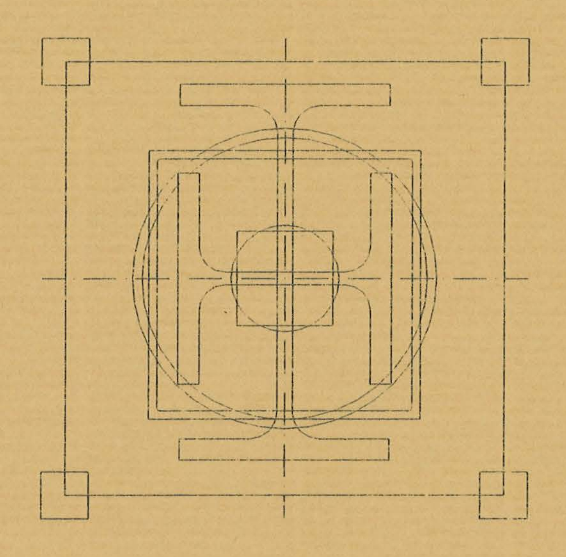
FLEXIÓN COMPUESTA Y PANDEO EN BARRAS RECTAS

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

FLEXIÓN COMPUESTA Y PANDEO EN BARRAS RECTAS

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Flexión compuesta y pandeo de barras rectas

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 29.04
ISBN: 84-95365-87-1
Depósito Legal: M-10642-2001

FLEXIÓN COMPUESTA Y PANDEO DE BARRAS

La combinación de solicitación normal y momento flector —flexión compuesta— aparece en todas las barras de pórticos rígidos e incluso en las estructuras de nudos articulados es inevitable en la práctica.

N

$\sigma_{máx} = \frac{N}{M}$

Compresión/tracción

Las barras comprimidas están siempre sometidas a una solicitación de flexión compuesta, lo que hace especialmente necesario el estudio de la combinación de solicitaciones.

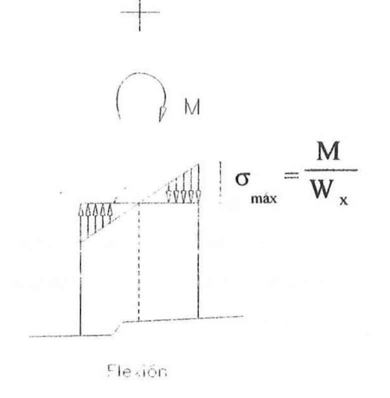
$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \sigma_{máx} = \frac{M}{W_x} \qquad \sigma_{máx} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_x}$$

La tensión máxima se obtiene sumando las de normal y flexión.

Si hubiera momentos en dos direcciones:

$$\sigma_{máx} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq f$$

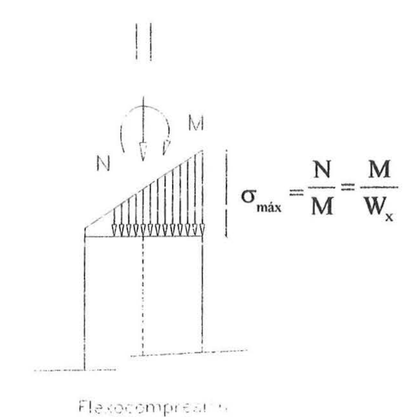
La comprobación, que no plantea problema alguno, puede no obstante simplificarse:



INFLUENCIA DE LA FORMA DE LA SECCIÓN

Suponiendo que existe momento en un solo plano:

$$\sigma_{máx} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_x}$$

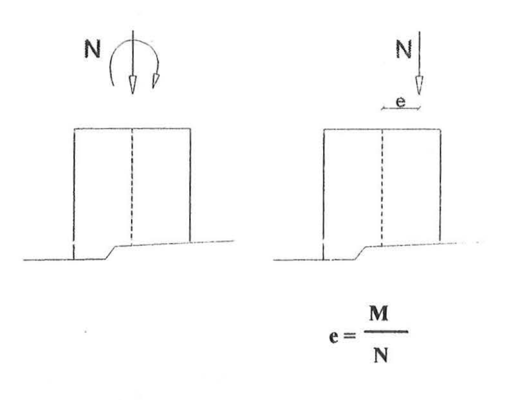


La importancia del momento depende de su relación con la solicitación normal —en muchos casos los momentos son irrelevantes en relación con la solicitación normal y viceversa—.

La manera de medir la importancia relativa de ambas solicitaciones es calcular la **excentricidad**:

Se llama **excentricidad a** $\mathbf{e = \frac{M}{N}}$

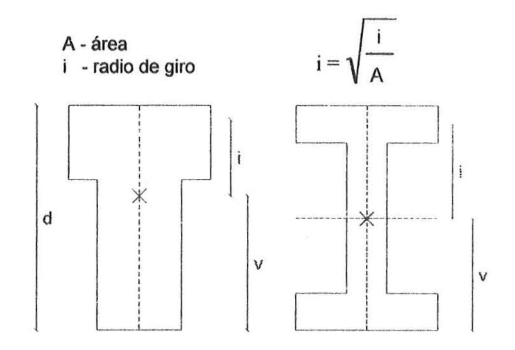
Si la excentricidad es muy grande, la solicitación normal N es irrelevante y si es muy pequeña el momento no tiene importancia.



Es útil expresar el módulo resistente en función del área A y el canto d:

$$W_x = \frac{I}{v} = \frac{2 \cdot I}{d} = \frac{2 \cdot A \cdot i^2}{d} = A \cdot d \cdot 2 \cdot \left(\frac{i}{d}\right)^2$$

los valores de $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2$



$$\sigma_{máx} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_x} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{A \cdot d} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2$$

$$\sigma_{máx} = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot d}{i^2}\right) = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \underbrace{\frac{e}{d}}_{\text{excentricidad relativa}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2}_{\text{Factor de forma que vale entre 2 y 8}}\right]$$

El radio de giro i es la distancia a la que hay que colocar la totalidad del área de la sección para que la inercia sea la misma que la de la sección de forma dada.

El contenido del corchete es el factor de aumento de la tensión media $\frac{N}{A}$ y da idea de la sobretensión debida al momento.

Al mismo tiempo, el inverso de $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2$ para cada forma de sección indica la excentricidad máxima para que no lleguen a producirse tensiones de tracción en una sección sometida a compresión:

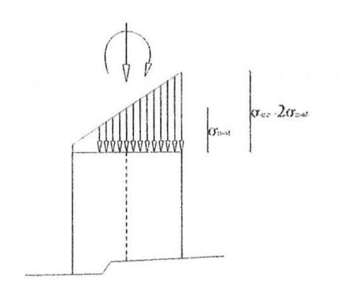
El mayor valor que puede alcanzar $\sigma_{máx}$ para que no se produzcan tracciones es $\sigma_{máx} = 2 \cdot \sigma_{med}$

Sustituyendo en (I) y despejando $\left(\frac{e}{d}\right)_{máx}$

$$2 \cdot \sigma_{med} = \sigma_{med} \cdot \left[1 + \frac{e}{d} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2\right] \Rightarrow \left(\frac{e}{d}\right)_{máx} = 2 \cdot \left(\frac{i}{d}\right)^2$$

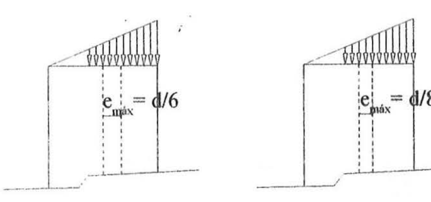
$$i_{muro} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1/12 \cdot L \cdot d^3}{L \cdot d}} \approx \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot d \Rightarrow \left(\frac{e}{d}\right)_{máx} = \frac{1}{6}$$

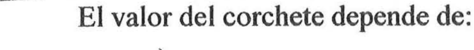
$$i_{columna} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot (d/2)^4 / 4}{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}} = 0.25 \cdot d \Rightarrow \left(\frac{e}{d}\right)_{máx} = \frac{1}{8}$$



d/6 es la excentricidad máxima sin tracciones para un muro y d/8 para una columna. **Es especialmente importante la aparición de tracciones en las fábricas** de piedra y ladrillo ya que provoca una disminución efectiva de la sección.

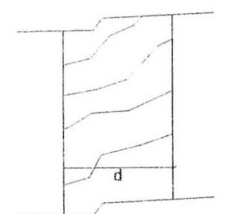
$$\left[1 + \frac{e}{d} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2\right] = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{med}}$$

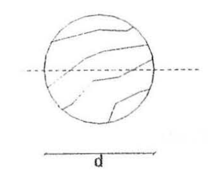


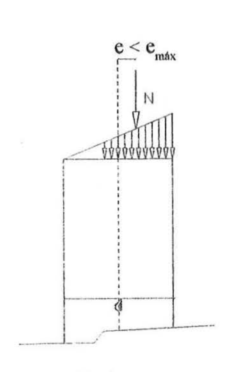


El valor del corchete depende de:

- La **excentricidad relativa.**
- La **relación entre el canto y el radio de giro,** $\frac{d}{i}$ que no es sino una propiedad de la forma de la sección:







No hay fisuras

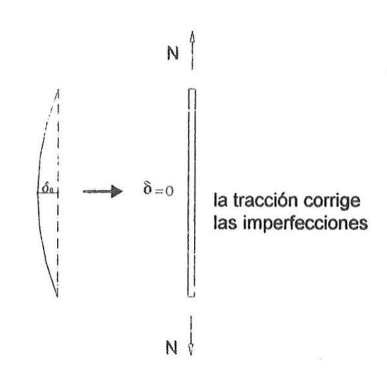
Fisuras en la zona traccionada de la fábrica

TABLA 1

	Área	Inercia	i/d	½ $(d/i)^2$	$2\cdot(i/d)^2$
Circular maciza	$\pi\cdot(d/2)^2$	$\frac{\pi\cdot(d/2)^4}{4}$	**0,25=1/4**	**8**	**1/8**
HEB	$\approx d^2/5$	$\approx d^2/90$	**0,25=1/4**	**8**	**1/8**
Rectangular maciza	$a\cdot d$	$a\cdot d^3/12$	**0,29=**$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$	**6**	**1/6**
Tubular hueca	$2\cdot\pi\cdot e\cdot d/2$	$\pi\cdot e\cdot(d/2)^3$	**0,35=**$\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$	**4**	**1/4**
Cuadrada hueca	$2\cdot e\cdot(2\cdot d-e)$	$\frac{\left[d^4-(d-e)^4\right]}{12}$	**0,40**	**3**	**1/3**
Perfiles	$\approx 0{,}26\cdot d^{1{,}574}$	$\approx 0{,}044\cdot d^{3{,}574}$	**0,40**	**3**	**1/3**
Sección compuesta	$4\cdot A_1$	$I_1+4\cdot A_1\cdot(d/2)^2$	**0,5=1/2**	**2**	**1/2**

COMPRESIÓN Y TRACCIÓN DE BARRAS REALES.

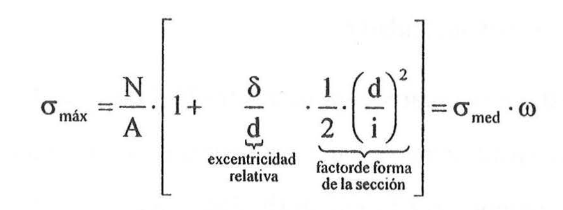
Una barra real presenta necesariamente una excentricidad inicial δ_0 que depende tanto de la perfección de la construcción y puesta en obra como de la posibilidad de medirla —sólo puede precisarse la ejecución en la medida en que es posible medir las imperfecciones: no puede exigirse lo que no puede comprobarse—.



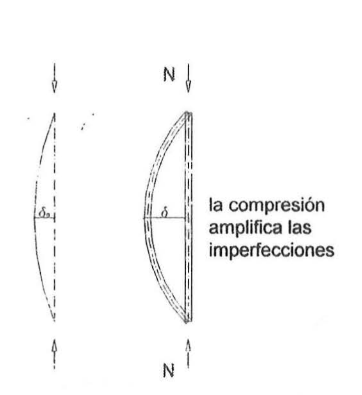
Bajo la acción de una solicitación de compresión la flecha inicial δ_0 se amplifica adquiriendo un valor δ.

Existirá pues una solicitación de flexión compuesta con una compresión N y un momento $N \cdot \delta$

Por lo tanto la tensión máxima será:

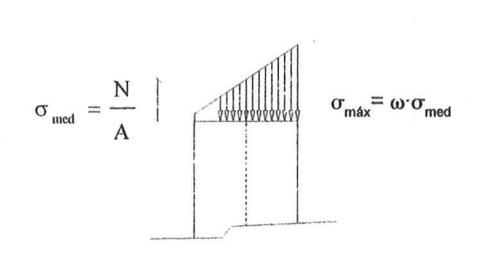


$$\sigma_{máx} = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \underbrace{\frac{\delta}{d}}_{\text{excentricidad relativa}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2}_{\text{factor de forma de la sección}} \right] = \sigma_{med} \cdot \omega$$



El contenido del corchete:

$$\omega = \left[1 + \frac{\delta}{d} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2 \right] = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{med}}$$ recibe el nombre de **factor de pandeo**, y es la **relación entre la tensión media y la máxima**. Una vez conocido ω:



$$\sigma_{máx} = \sigma_{med} \cdot \omega = \frac{N}{A} \cdot \omega \leq f$$

Será la comprobación estándar de las barras comprimidas.

No conviene olvidar que el factor ω no supone una ampliación de carga, que sigue siendo N, sino una manera práctica de medir el desequilibrio de tensiones en la sección.[1]

---

[1] En el Eurocódigo, norma Europea de cumplimiento todavía no obligado en España, en lugar del factor ω se utiliza un coeficiente $\chi < 1$ que afecta a la resistencia del material —ω mayora cargas y χ minora tensiones admisibles—.

$$\frac{N}{A} = \sigma_{med} \leq \frac{f}{\chi}$$

EL PANDEO EN BARRAS PERFECTAS.
LA SOLUCIÓN DE EULER.

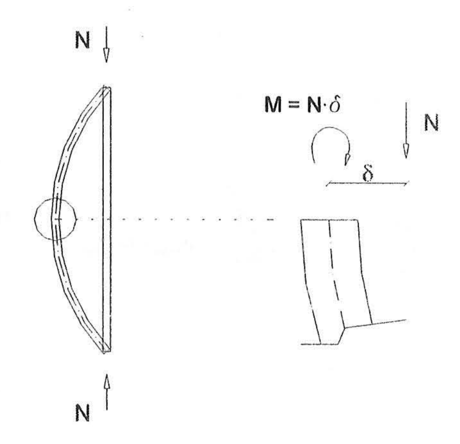
El problema del pandeo fue resuelto por Euler en el siglo XVIII no en respuesta a problemas técnicos sino simplemente desarrollando ejemplos de ecuaciones diferenciales.

La solución del problema empieza imaginando una **barra perfecta**, de longitud L, área A, inercia I, construida con un material de módulo de elasticidad E.

Si para una carga perfectamente centrada no hay, salvo el signo, diferencia de tensiones entre una barra extendida y una comprimida.

Pero si se separa ligeramente la barra de su forma perfecta, provocando una excentricidad δ:

En la barra extendida aparece un momento N·δ que tiende a poner recta la barra; cuanto menos rígida sea ésta, más recta llegará a ser, menor será la excentricidad y menor será la sobretensión consecuencia de ella. —De ahí la ventaja como elementos traccionados de los cables, en los que al fraccionar la sección se consigue minimizar la rigidez, facilitando el que el cable tensado sea completamente recto—.

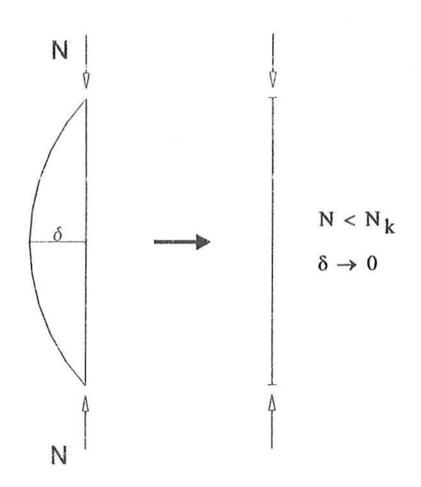


Por el contrario, cuando se comprime la barra el momento N·δ consecuencia de la excentricidad arbitraria δ, tiende a curvar la barra con un momento solicitación: $M = N \cdot \delta$

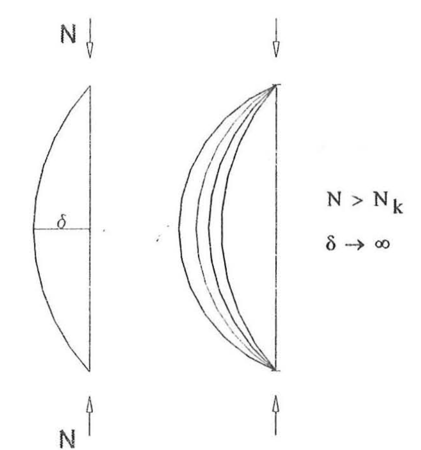
Por otra parte existe una relación entre la curvatura de la barra —consecuencia geométrica ineludible de δ— y el momento respuesta:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I} \Rightarrow M = E \cdot I \cdot \frac{1}{R}$$

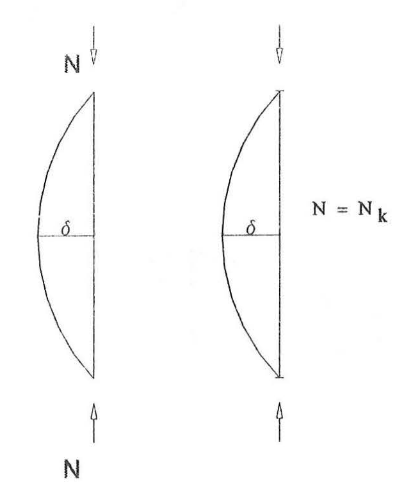
Pueden ocurrir tres casos:



- El momento solicitación N·δ es menor que el momento respuesta $\frac{1}{R}\cdot E\cdot I$ consecuencia de la curvatura que tiende a restablecer la forma inicial de la barra, que por tanto vuelve a ponerse perfectamente recta. **El equilibrio es estable.**



- El momento solicitación N·δ es mayor que el momento respuesta $\frac{1}{R}\cdot E\cdot I$ y en consecuencia la barra sigue curvándose y acaba rompiéndose: **el equilibrio es inestable.**

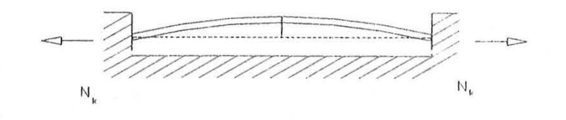


- El momento respuesta $\frac{1}{R}\cdot E\cdot I$ es igual que el N·δ y en consecuencia la barra ni se rompe ni se endereza: **el equilibrio es indiferente.**

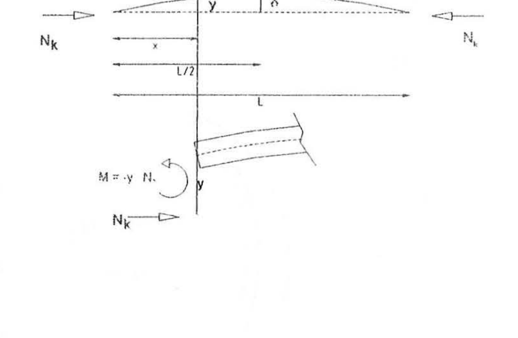
Esta situación se produce para un valor N_k llamado **carga crítica,** independiente de la magnitud de la deformación arbitraria δ.

Hay un modelo más claro de la carga crítica:

Si se encaja una barra en un hueco de un sólido prácticamente indeformable, algo más corto que su longitud l, **se llama carga crítica N_k a la fuerza que ejerce la barra en sus extremos tratando de enderezarse. La carga crítica es en consecuencia una propiedad de la barra; depende de su rigidez y debería con mayor propiedad llamarse RESPUESTA CRíTICA.**



Tomando origen en el extremo izquierdo, la forma de la barra en equilibrio vendrá dada por una función y(x) igual a 0 en ambos extremos x = 0 y x = L



$M = -y \cdot N_k$ será el momento solicitación en un punto genérico, mientras que el momento respuesta que tiende a enderezar la barra será, como ya se dedujo en flexión de barras:

$$M = \frac{1}{R} \cdot E \cdot I \cdot$$

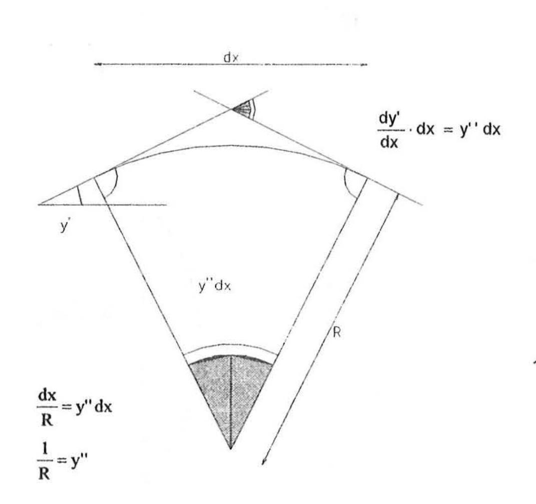
El equilibrio general de la barra, y por tanto el de todos sus puntos requerirá que para todo x:

$$-y \cdot N_k = \frac{1}{R} \cdot E \cdot I \text{, es decir: } \frac{1}{R} \cdot E \cdot I + y \cdot N_k = 0$$

Por otra parte si las deformaciones de la barra son pequeñas de modo que su normal en todo punto se aparte poco de la vertical:

$$\frac{1}{R} = y'' \quad \Rightarrow \quad y'' \cdot E \cdot I + y \cdot N_k = 0$$

ecuación diferencial lineal de segundo orden.



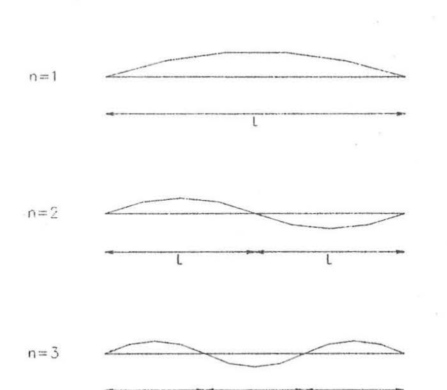
Es solución de la ecuación diferencial un arco de sinusoide de ecuación:

$$y = \delta \cdot \text{sen}\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \text{, para todo n entero.}$$

En efecto:

En los extremos $\begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = L & y = 0 \end{cases}$

Es decir, cumple la condición por los dos extremos.



$$y = \delta \cdot \text{sen}\,\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}$$

$$y' = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \delta \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}$$

$$y'' = \frac{-n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \delta \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}$$

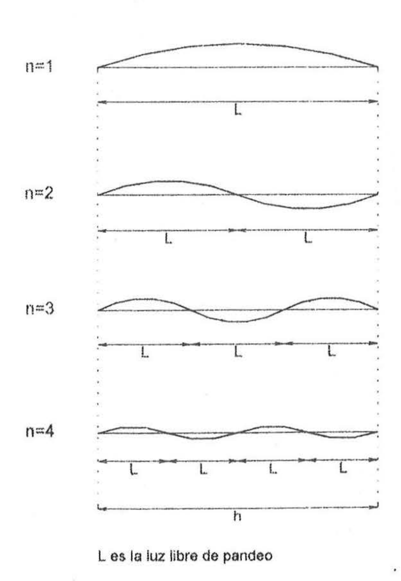
y sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{-n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \delta \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \cdot E \cdot I + \delta \cdot \text{sen}\,\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \cdot N_k = 0$$

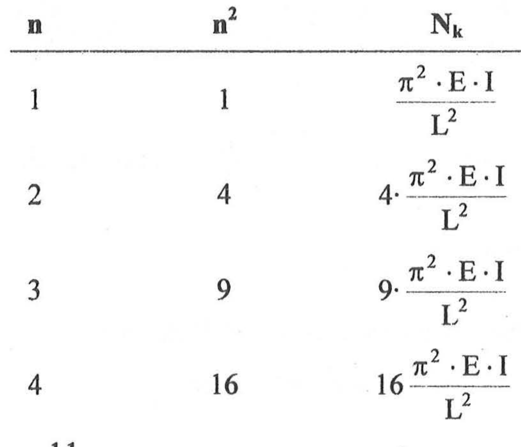
El valor $\delta \cdot \text{sen}\,\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}$ puede eliminarse, lo que significa que:

- La magnitud δ es irrelevante —siempre que la deformación no sea muy grande y se cumpla $y'' = \frac{1}{R}$
- Hay equilibrio en todos los puntos de la barra si $\mathbf{N_k = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I}$ es el valor de la **carga crítica.**

n significa el número de arcos de sinusoide compatible con las condiciones de contorno:



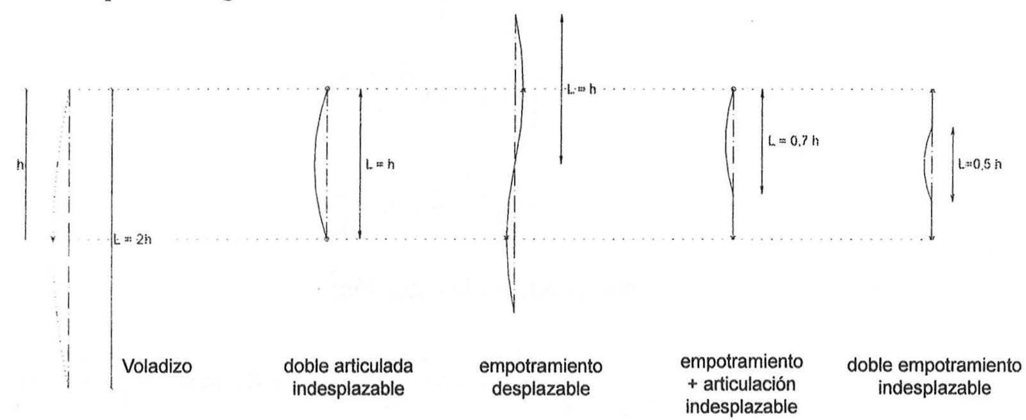
L es la luz libre de pandeo



n	$\mathbf{n^2}$	$\mathbf{N_k}$
1	1	$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$
2	4	$4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$
3	9	$9 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$
4	16	$16\,\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$

La barra tiende a adquirir la forma más sencilla compatible con las condiciones de contorno, es decir, la de menor carga crítica —existe el problema real de que si se adquiere una deformación más compleja, lo que es posible, luego salta bruscamente a otra más simple, ya que tiende a acumular el mínimo posible de energía.

Las formas de pandeo según la sustentación son:



En lo que sigue llamaremos longitud de pandeo l a la del máximo arco de sinusoide compatible con las condiciones de contorno.

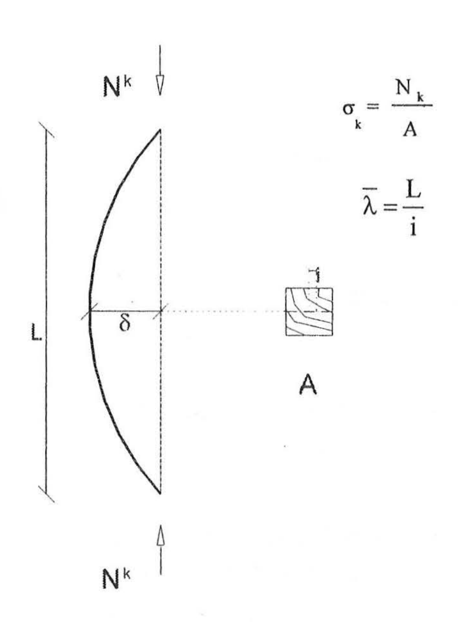
TENSIÓN CRÍTICA

Dividiendo la carga crítica por el área A, se puede eliminar la influencia del tamaño de la pieza y expresar el problema en términos de proporción, siendo

$$\boxed{N_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}}$$

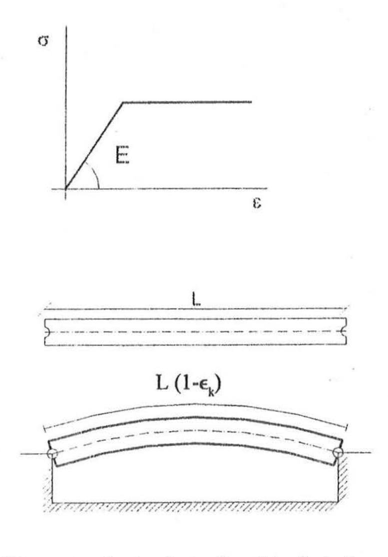
Se define así la **tensión crítica** $\sigma_k = \frac{N_k}{A}$

$$\sigma_k = \frac{N_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{I}{A}}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L}{i}\right)^2} \qquad \boxed{\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\bar{\lambda}^2}}$$

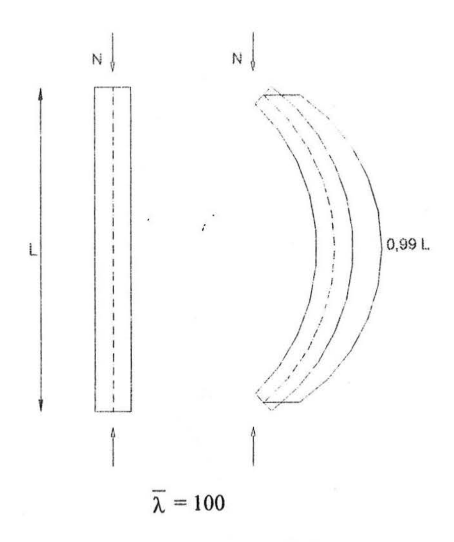


Se llama **esbeltez mecánica** a $\bar{\lambda} = \frac{L}{i}$ —no confundir con la **esbeltez geométrica** $\lambda = \frac{L}{d}$ —

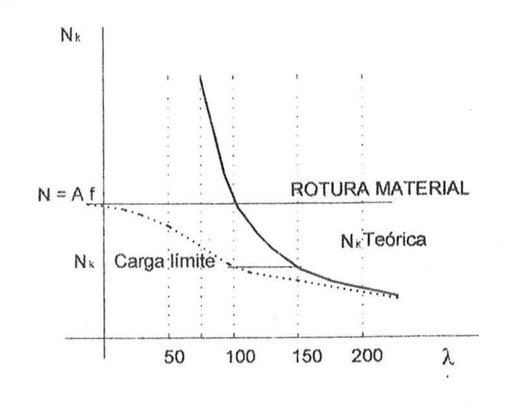
$\bar{\lambda}$ resume todo lo que es relevante en la geometría de la pieza a efectos de su resistencia a compresión.



El acortamiento de la directriz de la barra depende sólo de la geometría $\bar{\lambda}$



$\bar{\lambda} = 100$



DEFORMACIÓN UNITARIA CRÍTICA

Se puede aún eliminar el material y obtener la deformación unitaria crítica:

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E} = \frac{\pi^2}{\bar{\lambda}^2} \qquad \boxed{\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\bar{\lambda}^2}}$$

Como se ve, la deformación unitaria es sólo un problema geométrico independiente del material. El acortamiento de la directriz de la barra depende sólo de la geometría —$\bar{\lambda}$—.

En función de la esbeltez $\bar{\lambda}$ se producirá un compromiso entre el acortamiento por curvatura y la reducción de longitud de la directriz:

El acortamiento de una pieza comprimida de una esbeltez geométrica dada es el mismo independientemente del material.

$\bar{\lambda}$	=	10	50	100	150	200
$10^{-3}\cdot \varepsilon_k$	=	100	4	1	0,44	0,25

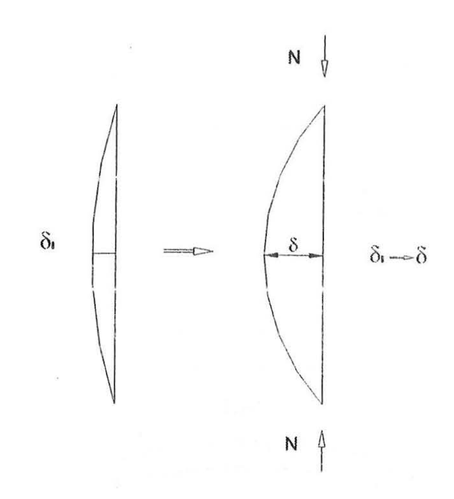
La deformación de $1\cdot10^{-3}$ correspondiente a las tensiones σ admisibles en los materiales comúnmente empleados en edificación, se alcanza para $\bar{\lambda} = 100$ independientemente del material.

CARGA ÚLTIMA DE PIEZAS REALES

Las deformaciones mayores del $1\cdot10^{-3}$ son imposibles de alcanzar en los materiales habitualmente usados en construcción sin que se produzca previamente la rotura, por lo que si se dibuja la gráfica de resistencia de una barra, aparece una doble línea —de trazo continuo—.

La curva representa la **tensión crítica** correspondiente a l, acortamiento teórico del eje de la pieza mientras que la recta corresponde a la **tensión de rotura** del material, que obviamente no puede ser superada.

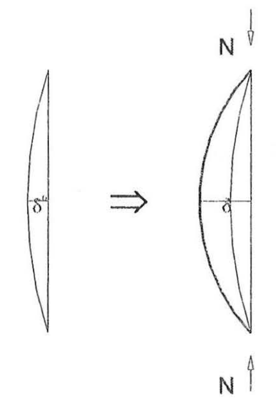
La línea de puntos indica, por otra parte, el resultado de los ensayos de barras reales, que da valores bastante más bajos. Ambas líneas sólo coinciden para valores muy altos de $\bar{\lambda}$ —obviamente para los muy bajos el límite es la rotura del material—.



AMPLIACIÓN DE FLECHA

La explicación se encuentra en la imperfección de las piezas reales cuya flecha inicial δ o se amplía dando lugar a una solicitación de **flexión compuesta.**

La fórmula de ampliación de flecha fue deducida por Euler tratando de averiguar el efecto de una fuerza axial sobre la flecha de una viga cargada —en aquella época la noción de viga imperfecta era completamente impensable—.Dedujo correctamente que una tracción disminuía la flecha mientras que una compresión la aumentaba. El análisis del aumento de excentricidad le condujo a la noción del pandeo, para lo que sustituyó la carga por una deformación arbitraria, como se ha visto en la formulación matemática.



Como paso previo conviene recordar que para una barra perfecta aunque hay equilibrio para todo δ, el momento depende de su magnitud,, $M = N_k \cdot \delta$

en una barra real

El momento solicitación depende de la

deformación total δ, $M=N\cdot\delta$

El momento respuesta depende de $\delta - \delta_0$ $M=N_k\cdot(\delta - \delta_0)$

(N_k es la fuerza que ejerce la barra tratando de recuperar la forma primitiva)

En la posición de equilibrio:

$$N_k\cdot(\delta - \delta_0) = N \cdot \delta \qquad \delta \cdot N_k - \delta_0 \cdot N_k = \delta \cdot N$$

$$\delta \cdot (N_k - N) = \delta_0 \cdot N_k \qquad \delta = \delta_0 \cdot \frac{N_k}{N_k - N}$$

Volviendo a la fórmula de la flexión compuesta.

$$\sigma_{máx} = \sigma_{med} \cdot \omega \leq f$$

En el límite, la tensión aparente que provoca el agotamiento de la pieza es: $\sigma_v = \frac{\sigma_e}{\omega}$ y la tensión segura es $\sigma = \frac{f}{\omega}$

Se puede así calcular el **factor de pandeo** ω **.**

$$\omega = 1 + \frac{\delta}{d} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)^2 = 1 + \frac{\delta_0}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{i} \cdot \frac{d}{i} \cdot \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta_0}{L}\right) \cdot \overline{\lambda} \cdot \left(\frac{d}{i}\right) \cdot \frac{\frac{\pi^2 \cdot E}{\overline{\lambda}^2}}{\frac{\pi^2 \cdot E}{\overline{\lambda}^2} - \frac{f}{\omega}}$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta_0}{L}\right) \cdot \overline{\lambda} \cdot \left(\frac{d}{i}\right)\right] \cdot \frac{1}{1 - \frac{f \cdot \overline{\lambda}^2}{\cos \pi^2 \cdot E}}$$

de lo que resulta una ecuación de segundo grado que permite despejar ω .

Si suponemos que las condiciones iniciales:

$\left(\frac{\delta_0}{L}\right) \cdot \left(\frac{d}{i}\right)$ dependen del material, —lo que dista de ser cierto pero es práctico— resultará que ω será función de:

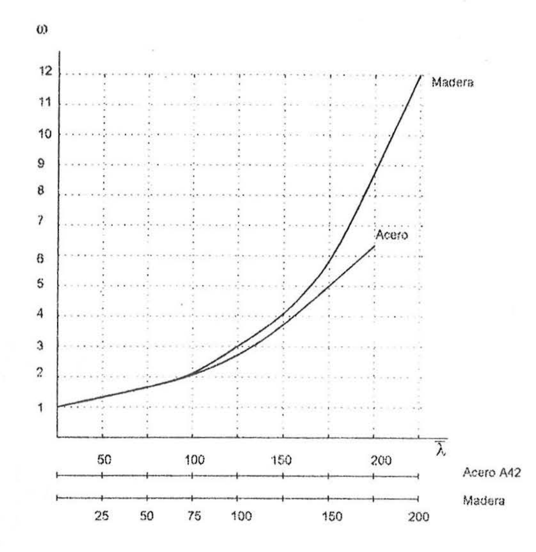
- f y E —material—.
- $\overline{\lambda}$ esbeltez mecánica, parámetro que condensa todas las propiedades geométricas de la barra relevantes para este problema.

El problema habitual de diseño es que no puede conocerse la imperfección inicial de una barra que no existe; se recurre a estudios estadísticos que a partir de numerosos ensayos de barras reales han permitido determinar los límites superiores de imperfección que cabe esperar en barras aparentemente rectas. No debe olvidarse que dentro del apartado *imperfección* deben incluirse además de las desviaciones geométricas los efectos de las tensiones iniciales y de la posible falta de homogeneidad del material.

Los valores límite de deformación inicial así determinados permiten calcular las **tablas de pandeo**.

Para los materiales habitualmente utilizados:

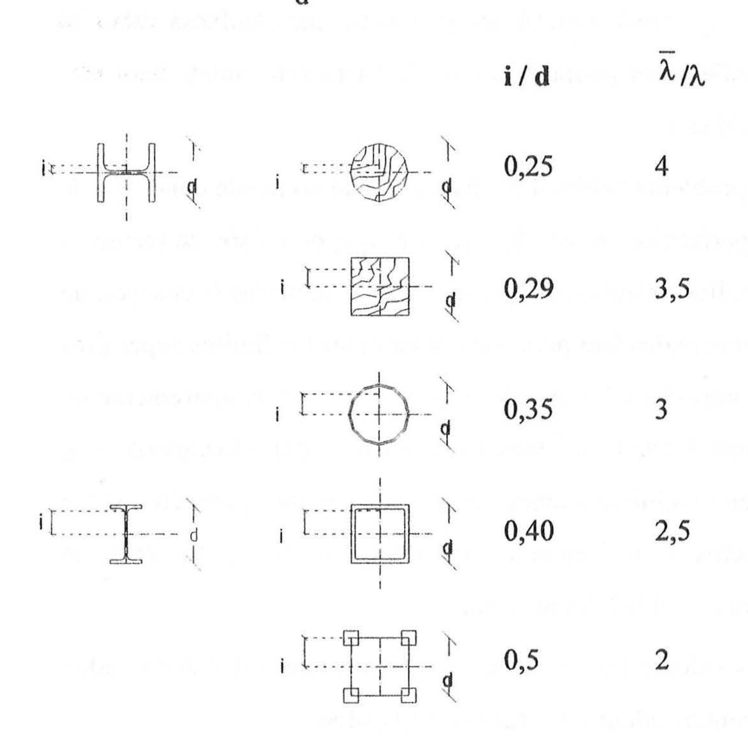
Madera		**Acero A-42**	
$\bar{\lambda}$	ω	$\bar{\lambda}$	ω
25	1,1	50	1,1
50	1,4	75	1,4
75	2,0	100	2,0
100	3,0	150	4,0
150	6,8	200	6,8
200	12		



La representación gráfica permite establecer una relación continua. Se observa que en el acero se suponen unas imperfecciones geométricas menores que la madera, lo que tiene como consecuencia un decalaje de las curvas cuyos trazados no obstante pueden hacerse coincidir bastante decalando las abscisas.

Hay una relación inmediata entre la esbeltez mecánica $\bar{\lambda} = \frac{L}{i}$

y la geométrica $\lambda = \frac{L}{d}$ para cada forma de sección:

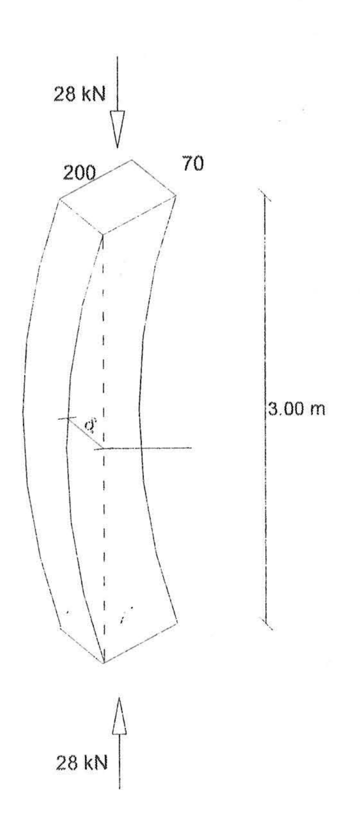


	i / d	$\bar{\lambda}/\lambda$
	0,25	4
	0,29	3,5
	0,35	3
	0,40	2,5
	0,5	2

COMPROBACIÓN DE BARRAS COMPRIMIDAS

Hay dos tipos de comprobación:

a) Peritaje de una barra cuya deformación inicial δ_0 es conocida.



δ_0=20 mm

$i = 0{,}29 \cdot 70 = 20$ mm

$$\bar{\lambda} = \frac{3000}{20} = 150$$

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-3}}{150^3} = 5{,}5 \text{ N·mm}^2$$

$$\sigma = \frac{28 \cdot 10^3}{14000} = 2 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

$$\delta = \delta_0 \cdot \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma} = 30 \cdot \frac{5{,}5}{5{,}5 - 2} = 30 \cdot 1{,}52 = 47 \text{ mm}$$

$$\omega = 1 + 6 \cdot \frac{47}{70} = 1 + 4 = 5$$

$$\sigma_{máx} = \sigma \cdot \omega = 2 \cdot 5 = 10 \text{ N·mm}^{-2} = f$$

—El ω obtenido en este caso particular es menor que el de la tabla—.

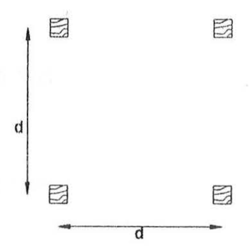
b) Peritaje de una sección:

- Calcular o buscar en la tabla el valor $i_{mín}$
- Determinar la longitud libre de pandeo —en función de las condiciones de contorno—.
- Calcular $\bar{\lambda} = \frac{L}{i}$
- Buscar el ω correspondiente a $\bar{\lambda}$.
- Comprobar que $\frac{N}{A} \cdot \omega \leq f$

DISEÑO

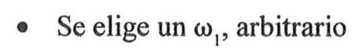
El problema de diseño se plantea habitualmente en términos de N y L y es preciso elegir material, forma de la sección y tamaño de la misma. En la práctica el material e incluso la forma de la sección vienen determinados por otras consideraciones precisas al diseño de la barra en cuestión (por ejemplo, los soportes de dificios son 2 UPN [ ] o HEB ⊢⊣, las barras de las estructuras trianguladas pequeñas y medianas son tubos de pared delgada ○ o □ y en cuanto al hormigón armado o la madera prácticamente sólo cabe usar secciones macizas, circulares, cuadradas o rectangulares) por lo que determinado material y forma de sección sólo queda dimensionar (calcular el tamaño).

Si se trata de una sección **inconexa**, el problema es trivial, lo razonable es elegir un valor de d tal que el pandeo sea mínimo, por ejemplo un acero A-42 ω=1,1 para $\bar{\lambda} = 50$ es decir



$i = \dfrac{L}{50}$ $\qquad d = 2\,i = \dfrac{L}{25}$, aunque podría dejarse a $d = \dfrac{L}{50}$ si se está dispuesto a asumir un $\omega = 2$.

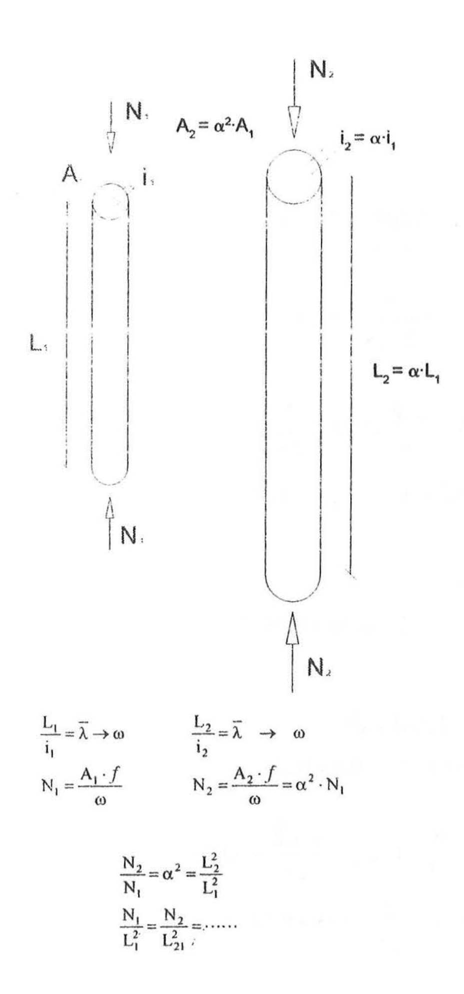
En las secciones conexas, el tamaño y por tanto i, dependen de N y ω y a su vez ω depende de i, lo más corto es tantear por el siguiente procedimiento:



- Se elige un ω_1, arbitrario
- Se calcula $A_1 = \dfrac{N \cdot \omega_1}{f}$
- $A_1 \rightarrow i_1 \rightarrow \bar{\lambda}_1 \rightarrow \omega_2$
- Si $\omega_2 = \omega_1$ el problema está resuelto

  Si $\omega_2 \neq \omega_1$ se repite el ciclo comenzando con $\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, (el proceso converge rápidamente).

Si se trata de racionalizar el proceso de elegir la forma de la sección:



Es útil estudiar la relación entre N y L, que permite calificar el grado de complejidad de la sección necesario para limitar el valor de ω.

Resuelto un caso concreto para una solicitación N_1 y una luz libre de pandeo L_1 (de lo que resulta un área A_1, un radio de giro i_1 y un factor de pandeo ω) , si se hace crecer la barra en un factor α.

$$L_2 = \alpha \cdot L_1$$

$$i_2 = \alpha \cdot i_1$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{\alpha \cdot L_1}{\alpha \cdot i_1} = \bar{\lambda}_1$$ el factor de pandeo es el mismo

$$A_2 = A_1 \cdot \alpha^2$$

$$N_2 = N_1 \cdot \alpha^2$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \alpha^2 = \frac{L_2^2}{L_1^2}$$

$$\boxed{\frac{N_1}{L_1^2} = \frac{N_2}{L_2^2}}$$

Es decir, **para una forma de sección y material dados, $\frac{N}{L^2}$ es un invariante al que corresponde un solo valor de ω.**

Queda por tanto únicamente establecer una correlación entre los valores de $\frac{N}{L^2}$ y las formas de la sección para un material dado para tener unas fórmulas directas de diseño que en función de N y L permiten deducir el factor de sobredimensionado ω correspondiente a cada tipo posible de solución.

Resulta útil establecer un catálogo de formas de sección de **área 1** elegidas de manera que el radio de giro de cada una —salvo la excepción de 2 UPN— sea doble de la anterior. Debe advertirse que los perfiles laminares no son proporcionales , por lo que para perfiles grandes los valores pueden variar bastante, en cuanto a los tubos el i/0,29 = 4 corresponde a un espesor de pared t = ϕ/32, para esfuerzos mayores el valor se aproximará a 3.

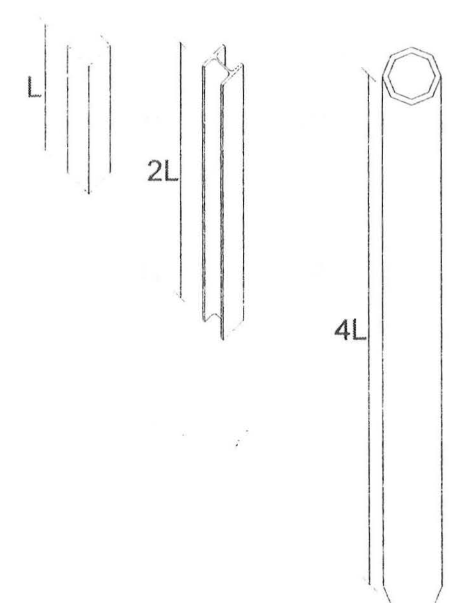
TABLA 2

ÁREA=1	i	i/0,29	JUSTIFICACIÓN
	0,29	1	$i=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}=0{,}29$
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	0,29	1	$A=\frac{\pi\cdot\phi^2}{4}\Rightarrow\phi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ $i=0{,}25\cdot\phi=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi}}\approx 0{,}29$
$\sqrt{5}$ — 2 i	0,56	2	$A=1\Rightarrow d\approx\sqrt{5}$ $i=0{,}25\cdot\sqrt{5}=0{,}56\approx 0{,}29\cdot 2$
$\sqrt{5}$ — 3 i	0,90	3	$A=1\Rightarrow d\approx\sqrt{5}$ $i=0{,}4\cdot\sqrt{5}=0{,}9\approx 0{,}29\cdot 3$
$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ — 4 i	1,13	4	$A=\pi\cdot\phi\cdot\frac{\phi}{32}=1\Rightarrow\phi=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=3{,}19$ $i=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\phi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}=1{,}13\approx 0{,}29\cdot 4$
0,50; $\frac{8}{\sqrt{3}}$ — 8 i	2,3	8	$i=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}=0{,}29\cdot 8$

$50\cdot\frac{1}{2}=50\cdot\frac{1}{4\cdot\sqrt{3}}\approx 1{,}5\cdot d$

—En el caso de sección inconexa hay que unir las barras resultantes que no deben tener una esbeltez $\overline{\lambda}$ mayor de 50 para que el pandeo de los elementos secundarios no sea significativo—.

El uso de un repertorio de formas, cada una de ellas con doble radio de giro que la anterior—**por lo que a igualdad de factor de pandeo ω podrá tener doble longitud y por tanto un valor de N / L² la cuarta parte**— permite tener unas referencias previas que ayudan en el proceso de diseño:



Para valores relativos i= 1, i = 2, i = 4 ..... Como ω es el mismo así como el área A, los valores de N / L^2 relativos serán: $N/L^2=1$, $N/L^2=1/4$, $N/L^2=1/16$....... y así sucesivamente.

Todas las barras tienen el mismo $\bar{\lambda}$ y por tanto el mismo ω.

Queda por determinar el valor de N / L^2 en un caso: para una barra maciza cuadrada de $10 \cdot 10\ mm^2$ con una longitud tal que su factor de pandeo sea 2, es decir, con una esbeltez geométrica $\bar{\lambda} = 100$.

$$i = 2{,}9\ mm \qquad L = 100 \cdot 2{,}9 = 290\ mm$$

$$N = \frac{170 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3}}{2} = 8{,}5\ kN$$

$$\frac{N}{L^2} = \frac{8{,}5}{0{,}29^2} \approx 100\ kN{\cdot}m^{-2}$$

Para barras de acero A-42 de sección cuadrada (o circular) maciza, cuando $\frac{N}{L^2} = 100\ kN{\cdot}m^{-2}$ el factor de pandeo será ω = 2.

Si se considera el valor ω = 2 como límite de sobredimensionado razonable y por tanto clave para decidir el cambio de forma de la sección, es fácil calcular cuál es el valor de $\frac{N}{L^2}$ para otras formas a partir del ya obtenido.

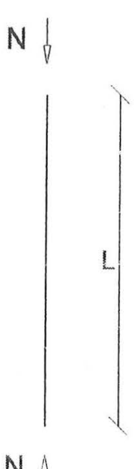
En efecto, para otra forma de sección de la misma área, la longitud L correspondiente al factor de pandeo ω = 2 será $L = L_0 \cdot \left(\frac{L}{L_0}\right)$ y en consecuencia: $L = L_0 \cdot \left(\frac{i}{i_0}\right)$

$$\frac{N}{L^2} = \frac{N}{L_0^2 \cdot \left(\frac{i}{i_0}\right)^2} = \frac{100}{\left(\frac{i}{i_0}\right)^2} = k(2)$$

TABLA 3

	i/i_0	ω=2 [k(2)]	ω = 1,25	ω = 1,1	ω = 1
	1	**100**	400	800	1600
	2	**25**	100	200	400
	3	**11**	44	90	180
	4	**6**	25	50	100
	8	**1,5**	6	12	25
	16	**0,4**	1,5	3	6
	32	**0,1**	0,4	0,8	1,5
	64	**0,025**	0,1	0,2	0,4

valores de N/L^2



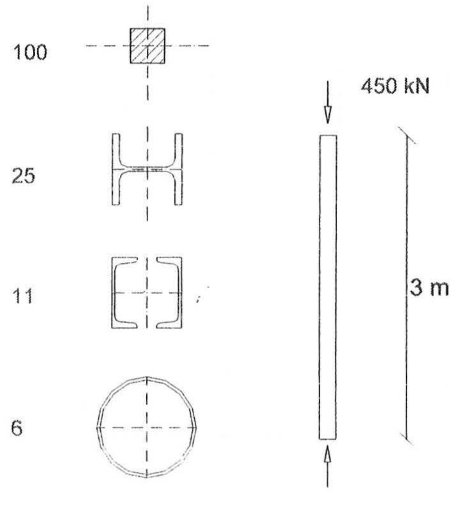
Dado un problema basta calcular N /L² (kN·m⁻²). Para cualquier sección cuyo k(2) sea menor que el N/L² calculado, el factor de pandeo ω será menor de 2 puede obtenerse un valor aproximado mediante la expresión

$$\omega \approx 1 + k(2) \Big/ \frac{N}{L^2}$$

EJEMPLOS:

- N = 450 kN   L = 3 m

$$\frac{N}{L^2} = \frac{450}{9} = 50$$



La sección más simple que tendrá un factor de pandeo $\omega \leq 2$ es un HEB (k(2) = 25). Cabe esperar un

$$\omega \approx 1 + \frac{25}{50} = 1{,}5$$



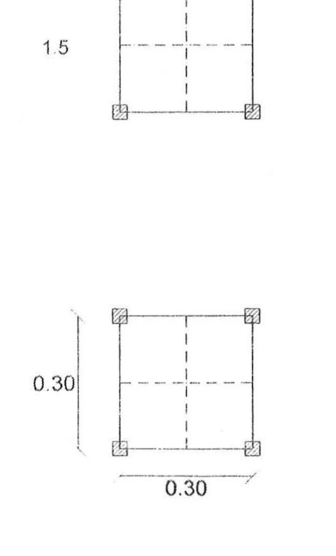
Se puede optar por dos UPN: $\Rightarrow$ k(2) = 11

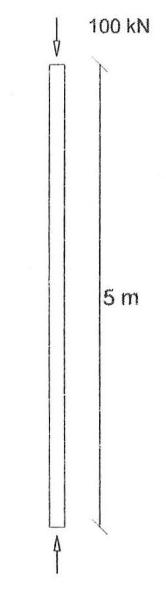
El factor de pandeo $\omega \approx 1 + \frac{11}{50} = 1{,}22$

Si se elige un tubo: $\Rightarrow k(2) = 6 \quad \Rightarrow \omega = 1 + \frac{6}{50} = 1{,}12$

- N = 100 kN   L = 5 m

$\frac{N}{L^2} = \frac{100}{25} = 4$ en la tabla k(2) 6 > **4** > 1,5





Con un tubo hueco ω >2 y es preciso hallar la sección mediante tanteos.

Si acudimos a una sección compuesta basta tomar $d \geq 0{,}20$ para que $\omega \leq 2$.

Madera.

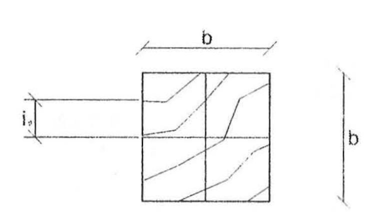
Para una misma solicitación N es necesaria por resistencia un área de madera aproximadamente 16 veces mayor que de acero —es obvio:

$\sigma_{\text{adm madera}} \approx 10\ \text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$ y $\sigma_{\text{adm acero}} \approx 173\ \text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$

Una barra de madera de 100 x 100 mm² de sección, para $\omega = 2$ tendrá una esbeltez mecánica de $\bar{\lambda} = 75$ —gráfica $\omega/\bar{\lambda}$—

Como $i = 29$ mm $\Rightarrow$ $L = \bar{\lambda} \cdot i = 2{,}175$ m

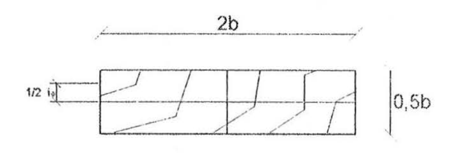
$\frac{N}{L^2} = \frac{(1/2) \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2{,}175^2} = \frac{100}{2 \cdot 2{,}175^2} \approx 11\ \text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$, es decir, el mismo valor de k(2) que se obtuvo para los 2 UPN.



Para otra secciones de madera:

- Proporción 1:4

  Su radio de giro será 1/2 del de la cuadrada de igual área, lo que da un valor de $\frac{N}{L_1^2} = \frac{N}{\left(L_0/2\right)^2} = \frac{4 \cdot N}{L^2} = 4 \cdot 11 = 44$

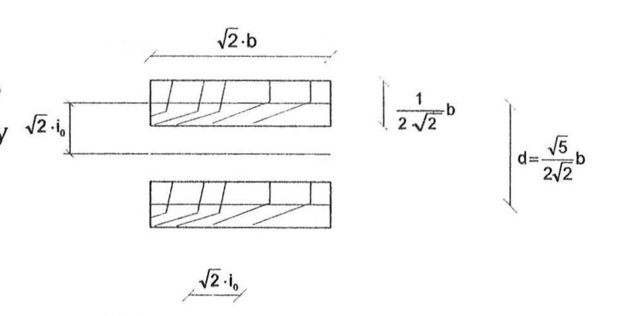


- Sección inconexa de dos tablones de área total 1 y proporción 1:4

  Cada uno de los tablones tendrá dimensiones $\sqrt{2} \times \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$

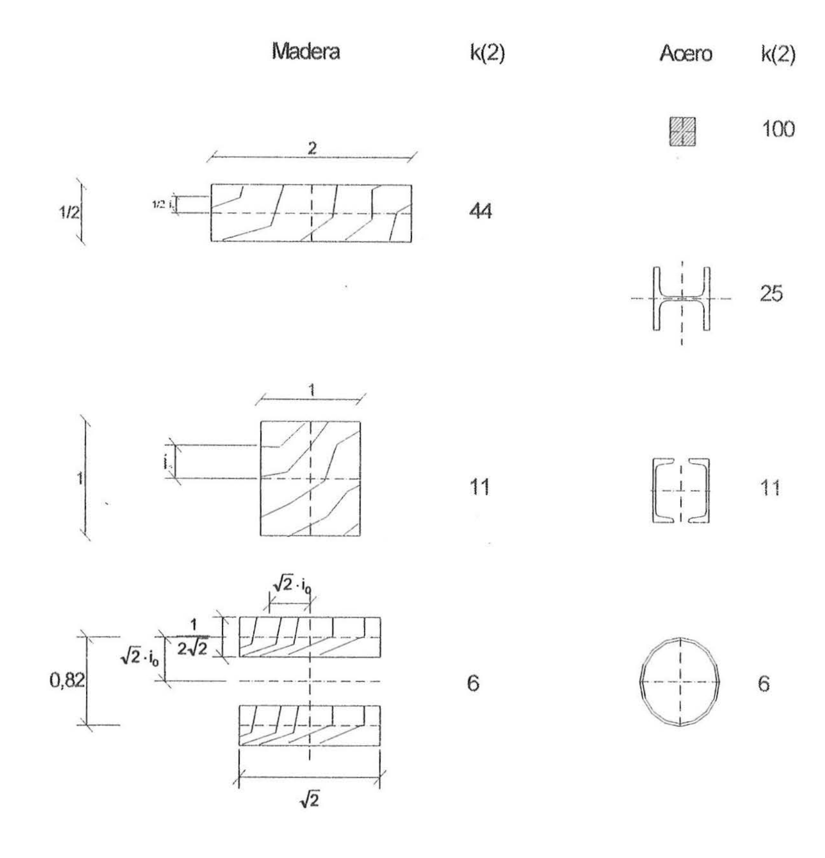
  El radio de giro en el sentido largo de las tablas será $\sqrt{2} \cdot i_0$ por lo que la longitud será $L \cdot \sqrt{2}$ y

  $$\frac{N}{L^2} = \frac{N}{\left(\sqrt{2} \cdot L_0\right)^2} \cdot \frac{11}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{L_0^2} = 5{,}5 \approx 6$$



Para que el radio de giro en el otro sentido sea también $\sqrt{2} \cdot i_0$ la distancia entre ejes de tablones d, es $\frac{\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}}$, es decir, $\sqrt{5}$ veces el lado corto[1].

Cabe por tanto esperar un factor de pandeo equivalente al de los tubos de pared delgada. En la tabla pueden intercalarse las correspondientes secciones.



---

[1]El radio de giro en este sentido depende de la inercia de la sección con respecto al eje horizontal, que aplicando el Teorema de Steiner vale: $I_h = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \right)^3 + 1 \cdot (d/2)^2$ —el área total de la sección es la unidad—

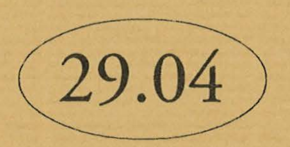
Sabiendo que $i_h = \sqrt{\frac{I}{A}}$ se calcula d para que el radio de giro sea $\sqrt{2} \cdot i_0$

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

